线性空间章节的几点体会

厦门大学数学科学学院　林亚南

2015年1月10日　福建商业高等专科学校

一. 从F^n到有限维线性空间

是具体到抽象的过程

F^n的特性:

可以用线性方程组判定线性相关性

线性空间的例子:

(1) 数域F上$m\times n$矩阵全体$F^{m\times n}$对于矩阵的加法和数乘构成线性空间. 特别的, 数域F上n维向量全体F^n是F上的线性空间. 令

$$V=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n \mid a_i=a_{i-1}+a_{i-2},3\le i\le n\}$$

是$\mathbb{R}$上的线性空间.

(2) 数域F是数域F上的线性空间, 其中加法运算为数的加法, 数乘运算为数的乘法.$\mathbb{C}$是$\mathbb{R}$上线性空间, 其中加法为数的加法, 数乘为数的乘法.

(3) 数域F上的一元多项式全体$F[x]$对于多项式的加法和数与多项式的数乘构成F上的线性空间.

(4) 实数域$\mathbb{R}$上闭区间$[a,b]$上全体实函数的集合$H[a,b]$对于函数的加法和数乘构成$\mathbb{R}$上的线性空间. $[a,b]$上全体实连续函数的集合$C[a,b]$对于函数的加法和数乘构成$\mathbb{R}$上的线性空间. 闭区间$[a,b]$上全体可微函数的集合$D[a,b]$对于函数的加法和数乘构成$\mathbb{R}$上的线性空间. 区间$[0,1]$上满足$f(1)=0$的实连续函数全体V对于函数的加法和数乘构成$\mathbb{R}$上的线性空间.

(5) 收敛于0的实数无穷数列对于数列的加法和数乘构成$\mathbb{R}$上的线性空间.

(6) 全体正实数$\mathbb{R}^+$在加法定义为$a \oplus b = ab$, 数乘定义为$k \odot a = a^k$构成实数域$\mathbb{R}$上的线性空间.

(7) 在$V = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$中, 定义

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a+c, b+d+ac), \quad k \odot (a, b) = (ka, kb + \frac{1}{2}k(k-1)a^2).$$

则V是$\mathbb{R}$上的线性空间.

链接n维线性空间与F^n的桥梁:

定理　数域F上任意n维线性空间都同构于F^n.

二. 若干线性空间的维数

1. 无限维线性空间基的存在性

定义 (1) 线性空间V的一个非空子集X称为线性无关, 若对于X中的任意有限个向量都线性无关.

(2) 线性空间V的一个非空子集B称为V的一个基, 如果

(i) B是线性无关;

(ii) V中的任意向量都可以由B中的有限个向量线性表示.

Zorn引理 在任何一个非空的偏序集中,如果任何升链(即一个全序子集)都有上界,那么这个偏序集必然存在一个极大元.

定理 任何一个线性空间V都存在一个基B.

证明 设V是一个线性空间. 考虑集合

$$S=\{V\text{中线性无关的向量组}\},$$

显然S非空. 在S上定义偏序关系为包含关系, 即元素$X\le Y$当且仅当$X\subseteq Y$. 对S的任意全序子集(链)

$$X_1\le X_2\le\cdots\le X_n\le\cdots,$$

令$T=\cup_{i=1}^{\infty}X_i$, 则显然$X_i\subseteq T$. 我们断言$T\in S$. 事实上, 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m\in T$, 则对于$\alpha_i$, 存在$X_{j_i}$, 使得$\alpha_i\in X_{j_i}$. 设$m$是$j_1,j_2,\cdots,j_n$中最大的数, 则$\alpha_i\in X_m, 1\in n$. 故$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m\in T$线性无关. 因而$T$是线性无关集合,所以$T\in S$. 这样$T$是该全序子集的上界. 至此, 我们证明了$S$满足Zorn引理的条件.

于是, S中存在极大元B. 作为S的元素, B是线性无关的向量组. 而由B的极大性, B添加任意向量α都将变成线性相关的, 即B能线性表出V所有向量. 于是B是线性空间V的一个基.

2. 关于$H[0,1]$的维数

题1(全国大学生数学竞赛题) 设V是实数域$\mathbb{R}$上的闭区间$[0,1]$上的全体实函数构成的线性空间, 加法与数乘如通常定义, $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x) \in V$. 证明下面两个命题等价:

(1) $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$线性无关;

(2) 存在$c_1, c_2, \cdots, c_n \in [0,1]$, 使得$\det(f_i(c_j)) \neq 0$.

证明 $(1) \Leftarrow (2)$: 考虑$a_1 f_1(x)+a_2 f_2(x)+\cdots+a_n f_n(x)=0$. 将$c_1, c_2, \cdots, c_n$分别代入, 得到方程组

$$\begin{cases} a_1 f_1(c_1)+a_2 f_2(c_1)+\cdots+a_n f_n(c_1)=0 \\ a_1 f_1(c_2)+a_2 f_2(c_12)+\cdots+a_n f_n(c_2)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1 f_1(c_n)+a_2 f_2(c_n)+\cdots+a_n f_n(c_n)=0 \end{cases}$$

已知$\det(f_i(c_j)) \neq 0$, 所以方程组只有零解$a_i=0, 1 \leq i \leq n$. 故$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$线性无关.

(1) $\Rightarrow$ (2): 对n做数学归纳法. 当$n=1$时命题显然成立. 假设当$n=k$时命题成立. 讨论$n=k+1$的情况. 因为$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)$线性无关, 所以存在$c_1, c_2, \cdots, c_k \in [0,1]$, 使得$\det(f_i(c_j))_{k\times k} \neq 0$. 令

$$F(x) = \det\begin{pmatrix} f_1(c_1) & \cdots f_k(c_1) & f_{k+1}(c_1) \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ f_1(c_k) & \cdots f_k(c_k) & f_{k+1}(c_k) \\ f_1(x) & \cdots f_k(x) & f_{k+1}(x) \end{pmatrix},$$

按照最后一行展开, 得到

$$F(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \cdots + \lambda_{k+1} f_{k+1}(x),$$

其中$\lambda_i \in \mathbb{R}$. 注意到$\lambda_{k+1} \neq 0$, 由$f_1(x), \cdots, f_k(x), f_{k+1}(x)$线性无关得到$F(x) \neq 0$. 故存在$c_{k+1}$, 使得$F(k+1) \neq 0$, 即$\det(f_i(c_j))_{(k+1)\times(k+1)} \neq 0$.

题2 证明$H[0,1]$是无限维线性空间.

证明 对任意的自然数n, 我们证明存在n个线性无关的函数$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x) \in H[0,1]$.

令

$$f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2, \cdots, f_n(x) = x^{n-1}.$$

则对于$[0,1]$中两两不同的数$c_1, c_2, \cdots, c_n$, $\det(f_i(c_j))$是范德蒙行列式, 故$\det(f_i(c_j)) \neq 0$. 所以$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$线性无关.

题3 求线性空间

$$V=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n \mid a_i=a_{i-1}+a_{i-2},3\le i\le n\}$$

的维数.

解 对于V中任意的向量$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, 因为$a_i=a_{i-1}+a_{i-2},3\le i\le n$, 所以由前两个分量唯一确定. 令

$$\varphi:\mathbb{C}^2\to V,\ \ (a,b)\mapsto(a,b,a+b,a+2b,\cdots),$$

易见φ是同构映射. 所以$\mathrm{dim}V=2$.

题4　求线性空间$\mathbb{R}^+$的维数, 其中加法定义为$a \oplus b = ab$, 数乘定义为$k \odot a = a^k$.

题5　在$V = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$中, 定义

$$(a,b)\oplus(c,d) = (a+c, b+d+ac),\quad k\odot(a,b) = (ka, kb+\frac{1}{2}k(k-1)a^2).$$

求V的维数.

题6 在3×3的方格中填入九个数, 要求每行每列和两个对角线所填的数字的和相等. 这样的填数方格对于矩阵的加法和数乘构成线性空间U. 求U的维数.

三. 有限维线性空间的两个应用

例1 求Fibonacci数列

$$F_1 = F_2 = 1, F_i = F_{i-1} + F_{i-2}, 3 \le i$$

的通项F_n.

解 考虑$\mathbb{C}$上的线性空间

$$V = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i = a_{i-1}+a_{i-2}, 3 \le i \le n\} \subseteq \mathbb{C}^n$$

则Fibonacci数列的前n项构成的n维向量$F = (F_1, F_2, \cdots, F_n)$在$V$中. 因为$\dim V = 2$, 我们求出$V$的一个基

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n), \eta = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n),$$

则存在$a, b \in \mathbb{C}$, 使得$F = a\xi + b\eta$, 即得到$F_n = a\xi_n + b\eta_n$.

考虑n项等比数列$\alpha=(1,q,q^2,\cdots,q^{n-1})$, 则$\alpha\in V$当且仅当$q^i=q^{i-1}+q^{i-2}$,$3\le i\le n$, 当且仅当$q^2-q-1=0$. 解之, 得到$q=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. 于是我们得到$V$的一个基

$$\xi=(1,q_1,q_1^2,\cdots,q_1^{n-1}),$$

$$\eta=(1,q_2,q_2^2,\cdots,q_2^{n-1}),$$

其中$q_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $q_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

为得到$F=a\xi+b\eta$的a,b, 考虑解线性方程组$1=a+b$, $1=aq_1+bq_2$, 得到$a=\frac{q_2-1}{q_2-q_1}$, $b=\frac{1-q_1}{q_2-q_1}$. 从而

$$F_n=a\xi_n+b\eta_n=\frac{q_2^n-q_1^n}{q_2-q_1}=\frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}.$$

例2(Duerer魔 方)　德国著名艺术家Albrecht Duerer (1471-1521)于1514年曾铸造了一枚名为"Melen cotia I"的铜币. 令人奇怪的是在这枚铜币的画面上充满了数学符号, 数学数字和几何图形. 铜币右上角的数字是

$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

Duerer魔方定义如果一个4×4数字方, 它的每一行,每一列,每一对角线及每个小方块上的数字之和均相等且为一确定数,则称这个数字方为Duerer魔方.

记$V = \{A = (a_{ij})_{4\times4} \mid A为Duerer魔方\}$. 对Duerer魔方施行加法, 数乘运算. 两个Duerer魔方A与B相加, 即A与B的对应元素相加. 实数r与Duerer魔方相乘, 即用数字r乘Duerer魔方中每一个元素. 则V构成一个向量空间, 称为Duerer魔方空间.

令R为行和, C为列和, D为对角线和, S为小方块和. 下面通过对0, 1两个数字组合的方法构造$R=C=S=D=1$的所有魔方$Q_1,Q_2,Q_3,Q_4,Q_5,Q_6,Q_7,Q_8$,称之为基本魔方.

$$Q_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad Q_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$Q_3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad Q_4=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$Q_5=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&1\end{pmatrix},\quad Q_6=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$Q_7=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\quad Q_8=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

命题 $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7$线性无关, 构成Duerer魔方空间的一个基.

回到Duerer铸造的铜币, 设$A = d_1Q_1 + d_2Q_2 + d_3Q_3 + d_4Q_4 + d_5Q_5 + d_6Q_6 + d_7Q_7$,则

$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1+d_2 & d_6 & d_5+d_7 & d_3+d_4 \\ d_3+d_5 & d_4+d_7 & d_1+d_6 & d_2 \\ d_4+d_6 & d_2+d_5 & d_3 & d_1+d_7 \\ d_7 & d_1+d_3 & d_2+d_4 & d_5+d_6 \end{pmatrix}$$

解得$A = 8Q_1 + 8Q_2 + 7Q_3 + 6Q_4 + 3Q_5 + 3Q_6 + 4Q_7$.

四. 线性方程组$AX=0$的解空间

命题

齐次线性方程组$AX=0$与$BX=0$同解

$$\Leftrightarrow AX=0,\ \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X=0,\ BX=0\text{同解}$$

$\Leftrightarrow A$的行空间$=B$的行空间

$\Leftrightarrow A$的行向量组等价于B的行向量组

$$\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}=\operatorname{rank}(B)$$

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵P, 使得$A=PB$.

谢 谢！

Home Page
Title Page
Page 27 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit